数理解析研究所講究録
475巻 1982年 140-146

部分群の束による群の特徴づけ

青学大 理 小池和彦

東大 理 宇沢達

(Kazuhiko Koike, Tōru Uzawa)

群 G が与えられている時，その部分群全体の集合に包含関係によって束の構造を与えたものを $L(G)$ とかく。 ここで問題にするのは，他に $L(G) \cong L(G^*)$ となる群 G^* があるかどうかである。 $L(G)$ が $L(G^*)$ と同型の時，常に G と G^* が同型になるならば，群 G はその部分群の束 $L(G)$ によって特徴づけられるということにする。

結果は，次の群が $L(G)$ によって特徴づけられることである。

1. 次数 ≥ 4 の交代群 $\mathfrak{A}_n$ $(n \geq 4)$.
2. 位数 $2k$ の二面体群 G で，(すなわち階数2のコクセター群)，次のいずれかが成立するもの。

(以下の条件は必要十分である。)

i) k は偶数。

ii) $k = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ と因数分解した時，$(p_1 < \cdots < p_r)$

k は奇数であり，且つ

$$G.C.M.(p_1-1, \cdots, p_r-1)=2$$

$e_1=1$ の時は更に

$$G.C.M.(p_1, p_2-1, \cdots, p_r-1)=1.$$

3．階数 ≥ 3 の有限コクセター群。

4．階数 ≥ 4 の既約アフィンワイル群。

注意．1．については，R. Schmidt [2] による証明がある。ここでは，小池[1] による別証を与える。なお，R. Schmidt [3] は，$\mathrm{Aut}\,L(\mathfrak{A}_n) \cong \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_n$ $(n \geq 4)$ となるための必要十分条件が $n \neq 4, 3^r, 3^{r+1}$ ($r \geq 3$ 且 奇数) となることを示している。

1．の証明

$L(G) \cong L(\mathfrak{A}_n)$ として，n についての帰納法で示す。まず次のことに注意する。以下，$n \geq 4$ とする。

(*) $\mathfrak{A}_n$ の $\mathfrak{A}_{n-1}$ と同型な部分群は，$n \neq 6$，$n \geq 5$ であれば n ケで互いに共役である。$\mathfrak{A}_6$ の中の $\mathfrak{A}_5$ と同型な部分群は 12 ケで $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}_6$ の作用で互いに移り合う。

このことから，$n=4, 5, 6$ が示されているとすると，$n \geq 7$ の時は以下の様にして従う。

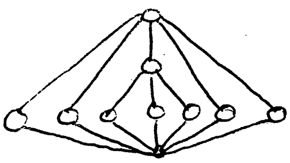
(*)より，Gには$\mathfrak{A}_{n-1}$と同型な部分群が$H_1, \cdots, H_n$とnケある。

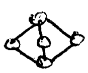
まず，$N_G(H_i)=H_i$となる。そうでないとすれば，H_iはGの極大部分群であるから，$N_G(H_i)=H_i$となる。一方，$L(\mathfrak{A}_n)$の構造より，$H_i \cap H_j$がH_jのuntrivial部分群となるものがある。$H_i \triangleleft G$であるから，$H_i \cap H_j \triangleleft H_j$。これは$H_j$の単純性に反する。

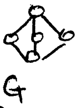
従って，$\{H_1, \cdots, H_n\}$はGを共役で作用させると，$|G/H_1|=N$ケの元からなる軌道にわかれる。故に$N|n$。

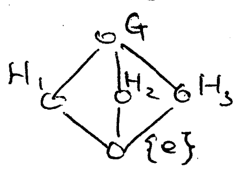
H_1を含む軌道を考えれば，準同型$f: G \to \mathfrak{S}_N$が生ずるが，$N_G(H_1)=H_1$故$\operatorname{Ker} f \subsetneqq H_1$となる。$H_1$の単純性より，$\operatorname{Ker} f=\{1\}$となる。故に$|f(G)|=N \times \frac{(n-1)!}{2}$は$|\mathfrak{S}_N|=N!$を割り切る。$N|n$と合わせて$N=n$を得る。$f(G)$は$|\mathfrak{S}_n|$の指数2の部分群であるから，$f(G)=\mathfrak{A}_n$。

$n=4$の時。$L(\mathfrak{A}_4)$は左下図の様になる。従って，



に対応するGの部分群が$C_2 \times C_2$であることを示せば，それは正規部分群であるから，$G \cong \mathfrak{A}_4$が従う。

が部分群の束で決まること。$|H_i|=d_i$（d_iは素数）とする。



$|G|=1+(d_1-1)+(d_2-1)+(d_3-1)$
$=d_1+d_2+d_3-2$。$x \in H_1$，$x \neq e$をとると，

x倍 : $H_2-\{e\} \to H_3-\{e\}$ は全単射になる。従って $d_2=d_3$。
同様にして、$d_1=d_2=d_3=p$。 $|H_1|=p \mid |G|=3p-2$.
∴ $p \mid 2$. 従って $p=2$。故に $G\cong C_2\times C_2$ である。

$n=5$ の時。$\mathfrak{A}_5$ の部分群で $\mathfrak{A}_4$ と同型なものは5ケである。これを $H_1,\cdots,H_5$ とする。(G の中で対応するもの。)

$N_G(H_i)=H_i$ である。$N_G(H_i)\neq H_i$ とすれば、H_i の極大性より、$N_G(H_i)=G$。$L(\mathfrak{A}_5)$ を見れば、H_j で、$H_i\cap H_j\cong \mathbb{Z}_3$ となるものが存在することがわかる。しかしこれは H_j の正規部分群となって、$H_j\cong\mathfrak{A}_4$ と矛盾する。

$n=6$ の時。G の部分群で $\mathfrak{A}_5$ と同型なものは丁度12ケである。これらを $H_1,\cdots,H_{12}$ とする。$n\geq 7$ と同様にして、$N_G(H_i)=H_i$ を得る。$\{H_1,\cdots,H_{12}\}$ は丁度 $N=|G/H_1|$ ケずつの軌道にわかれる。これから、$N \mid 12$。$n\geq 7$ と同様にして、$f: G\to \mathfrak{S}_N$ は単射。従って、$N\times\frac{5!}{2} \mid N!$。故に $N\geq 6$。$N \mid 12$ と合せて $N=6$ 又は 12。$N=12$ として矛盾を示す。この時、G の 2-Sylow群の位数は 16 になる。[6] 命題1.4によって、巡回群でない2-群は部分群の束を見れば位数がわかる。これは $\mathfrak{A}_6$ の 2-Sylow群の位数が8であることに反する。従って、$N=6$。$f(G)$ は $\mathfrak{S}_6$ の指数2の部分群。よって、$f(G)=\mathfrak{A}_6$。 //

2の証明 [6]のp.271～280を参照。

3の証明 [6]を参照。2よりも簡単である。

4の証明 [6]のp.265～270，特に命題2.1と同様のことを，既約アフィンワイル群の表に対して実行することによって，$L(G) \cong L(G^*)$ （G：既約アフィンワイル群）に対して，$f: G \longrightarrow G^*$，fは全射準同型が存在することがわかる。従って，fが単射であることを言えばよい。

そのために，次のことを示す。

「Gが既約アフィンワイル群であれば，$G \triangleright N$，$G \neq N$，$N \neq \{e\}$であれば，G/Nは有限群である。」

次のことに注意する。Gは有限群WとWの$\mathbb{Z}^n$への忠実且既約な作用によって，定まる半直積$W \ltimes \mathbb{Z}^n$と同型になる。このことより，NをGのnon-trivial正規部分群とした時：$N \cap \mathbb{Z}^n \neq \{e\}$を示せばよいことになる*。$N \cap \mathbb{Z}^n = \{e\}$とする。この時Nの$\mathbb{Z}^n$への共役での作用は自明である。一方，$G/\mathbb{Z}^n = W$の$\mathbb{Z}^n$への共役での作用は忠実であった。$N < G/\mathbb{Z}^n = W$と見なせるのでこれは矛盾である。

* $N \cap \mathbb{Z}^n \ni v \neq 0$とすれば，vのW orbitが張る$\mathbb{Z}$のsublatticeはWの$\mathbb{Z}^n$が既約であるから，rankがn。よって$N \cap \mathbb{Z}^n$はrank nのsublatticeである。$G/N \hookrightarrow (W/W \cap N) \ltimes (\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^n \cap N)$となって，$\mathbb{Z}^n/N \cap \mathbb{Z}^n$は有限群である。従って$G/N$も有限群で

ある。以上で，アフィンワイル群について用いた性質はブルバキのリー群とリー環 4，5，6章を参照されたい。

問題等。

1) 3，4を見て自然に思いつくのは，一般のCoxeter群（あるいはHyperbolic程度でも）をはその部分群の束で決るか？という問題である。それには，次の問題がとければよい：$f: G \to G'$ 全射準同型，又 $L(G) \cong L(G')$ であれば，f は同型か？。

2) 1，4は岩堀先生の出された問題であるが，それに関連して先生は，Coxeter群の部分群で，丁度偶数個の鏡映の積でかける元の全体からなるものは部分群の束で決まるか？という問題を出された。

文献

[1] 小池和彦，"On some groups which are determined by their subgroup lattices", to appear.

[2] Schmidt, R：Untergruppenverbände zweifach transitiver Permutationsgruppen", Math. Z. 144 (1975)

[3] Schmidt, R：Verbandsautomorphismen der alternierenden Gruppen, Math. Z. 154 (1977)

[4] 宇沢達, "Subgroup lattices of Finite Coxeter Groups"
to appear

[5] 宇沢達 "有限Coxeter群とその部分群の束による特徴づけ" 第4回代数セミナー報告集 1981.